工程數學
Engineering Mathematics

- 第四章：拉普拉斯轉換(Laplace Transform)
  - 狄拉克函數(短脈衝)
  - 部分分式，微分方程式
  - 微分方程組

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

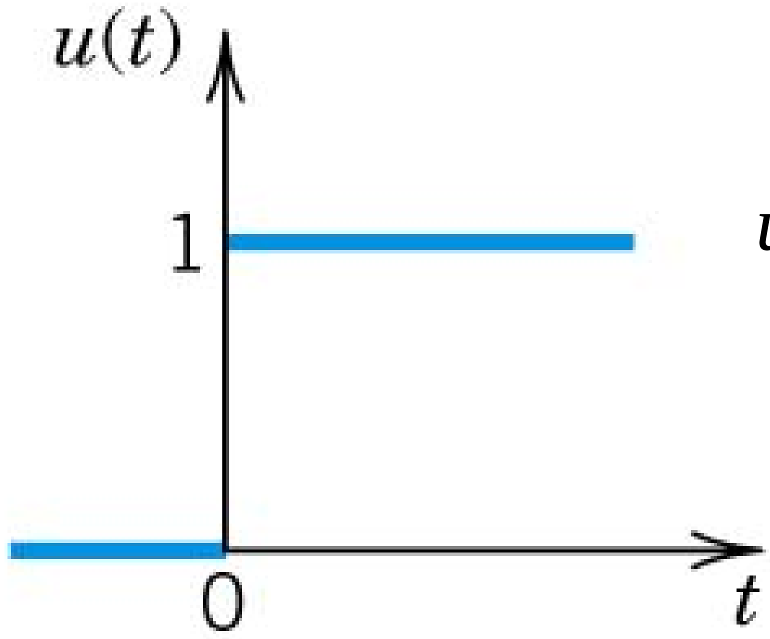


Fig. 110. Unit step function $u(t)$

單階函數

$$u(t)=\begin{cases}0 & ,t<0\\ 1 & ,t>0\end{cases}$$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

單階函數(時間向右移位 a)

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & ,t<a\\ 1 & ,t>a\end{cases}$$

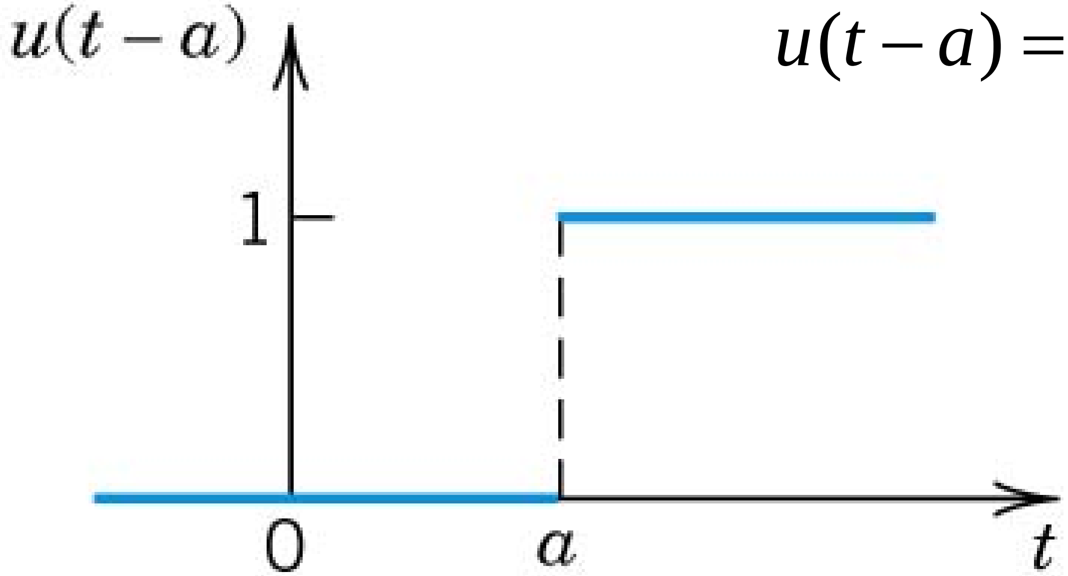
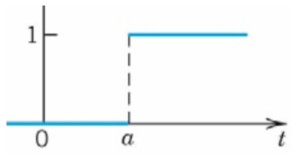
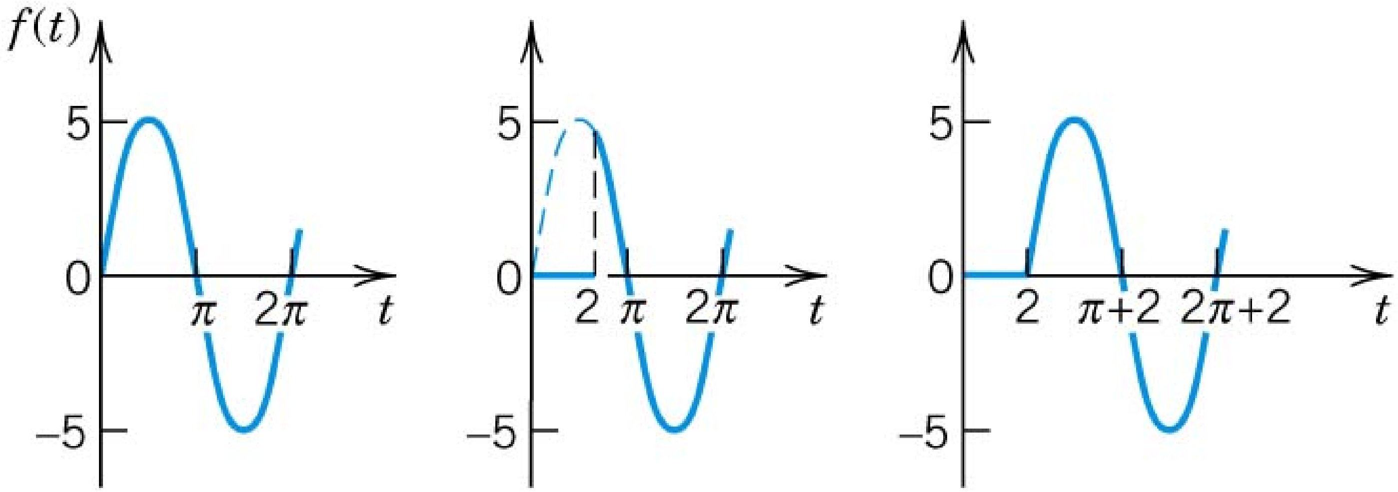


Fig. 111. Unit step function $u(t-a)$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & ,t<2 \\ 1 & ,t>2\end{cases}$$

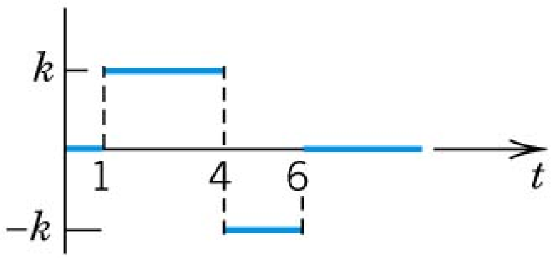




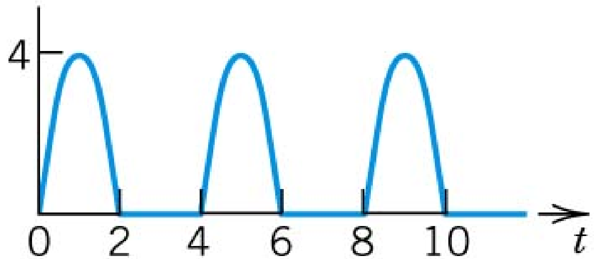
(a) $f(t) = 5 \sin t$ (b) $f(t)u(t-2)$ (c) $f(t-2)u(t-2)$

Fig. 112. Effects of the unit step function: (a) Given function. (b) Switching off and on. (c) Shift.

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)



(A) $k[u(t-1) - 2u(t-4) + u(t-6)]$

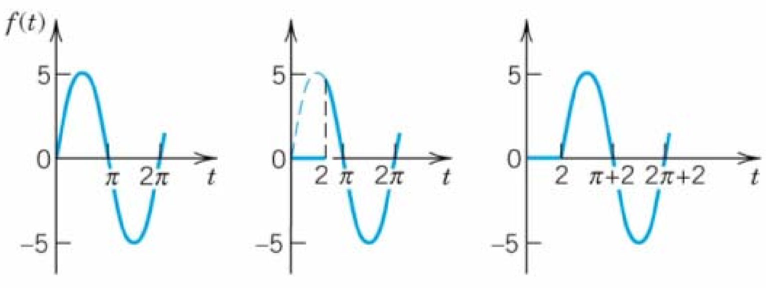


(B) $4 \sin(\frac{1}{2}\pi t)[u(t) - u(t-2) + u(t-4) - + \cdots]$

Fig. 113. Use of many unit step functions

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

t 移位：在 $f(t)$ 中以 $t-a$ 取代



(a) $f(t) = 5\sin t$ (b) $f(t)u(t-2)$ (c) $f(t-2)u(t-2)$

若 $f(t)$ 具有轉換函數 $F(s)$，則'移位函數'定義如下：

$$\tilde{f}(t) = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ f(t-a) & , t > a \end{cases}$$

$$L\{\tilde{f}(t)\} = L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

證明

$$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-s(a+\tau)}f(\tau)d\tau$$

以 $\tau+a=t$ 作變數替換

原式改寫爲 : $\displaystyle\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt=\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt$

$=L\{f(t-a)u(t-a)\}$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$L\{\tilde{f}(t)\} = L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$
$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

例如：$f(t) = 5\sin t$，其轉換函數爲 $F(s) = \dfrac{5}{(s^2+1)}$，

則 $5\sin(t-a)u(t-a)$ 之轉換函數爲

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\frac{5}{(s^2+1)}$$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$L\{\tilde{f}(t)\}=L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$
$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)u(t-a)$$

例如: $f(t)=u(t-a)$, 求其轉換函數

$$u(t-a)=1\times u(t-a)$$

令$f(t)=1$, 上式改寫爲 $f(t)\times u(t-a)=f(t-a)\times u(t-a)$

查表可得 $f(t)=1$之轉換函數爲 $\dfrac{1}{s}$

$$L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)=e^{-as}\frac{1}{s}=\frac{e^{-as}}{s}$$

p211

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$L\{\tilde{f}(t)\} = L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$
$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

例如：$f(t) = ku(t-a)$, 求其轉換函數, k 爲常數

$$f(t) = k \times u(t-a)$$

令 $g(t) = k$, 上式改寫爲 $g(t) \times u(t-a) = g(t-a) \times u(t-a)$

查表可得 $g(t) = k$ 之轉換函數爲 $\dfrac{k}{s} = G(s)$

$$L\{g(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}G(s) = e^{-as}\frac{k}{s} = \frac{ke^{-as}}{s}$$

p211

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$L\{\tilde{f}(t)\} = L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$
$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

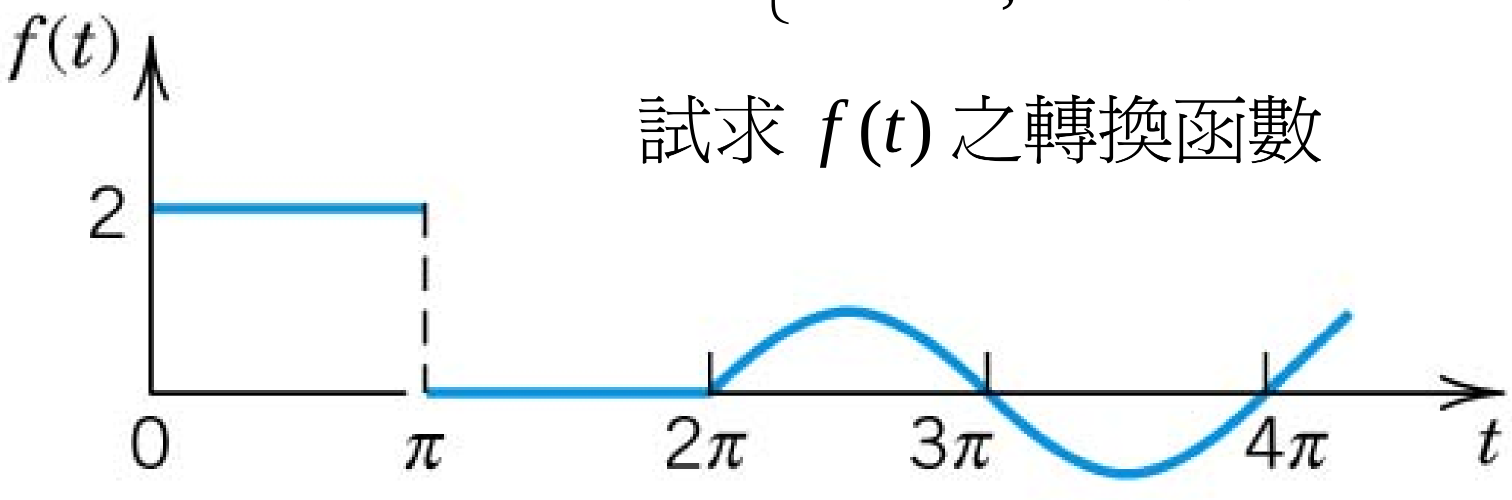
例如: $f(t) = 2tu(t-1)$, 求其轉換函數

$$2tu(t-1) = [2(t-1)+2] \times u(t-1) = 2(t-1)u(t-1) + 2u(t-1)$$

$$L\{2tu(t-1)\} = L\{2(t-1)u(t-1) + 2u(t-1)\}$$
$$= L\{2(t-1)u(t-1)\} + L\{2u(t-1)\}$$
$$= \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s}$$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$f(t)=\begin{cases}2 & ,0<t<\pi \\ 0 & ,\pi<t<2\pi \\ \sin t & ,t>2\pi\end{cases}$$



試求 $f(t)$ 之轉換函數

Fig. 114. Example 1

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$f(t)=\begin{cases}2 & ,0<t<\pi \\ 0 & ,\pi<t<2\pi \\ \sin t & ,t>2\pi\end{cases}$$ 試求 $f(t)$ 之轉換函數

$$f(t)=2u(t)-2u(t-\pi)+u(t-2\pi)\sin t$$

因 $\sin t$ 爲週期爲 2π 之週期函數

$$\therefore \sin t=\sin(t-2\pi)$$

$$f(t)=2u(t)-2u(t-\pi)+u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)$$

$$L\{f(t)\}=L\{2u(t)-2u(t-\pi)+u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)\}$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{2e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

p211

工數

練習時間

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$f(t)=\begin{cases}2 & ,0<t<\pi\\ 0 & ,\pi<t<2\pi\\ \cos t & ,t>2\pi\end{cases}$$

試求 $f(t)$ 之轉換函數

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$f_k(t-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & a \le t \le a+k \\ 0 & \text{其他時刻}\end{cases}$$

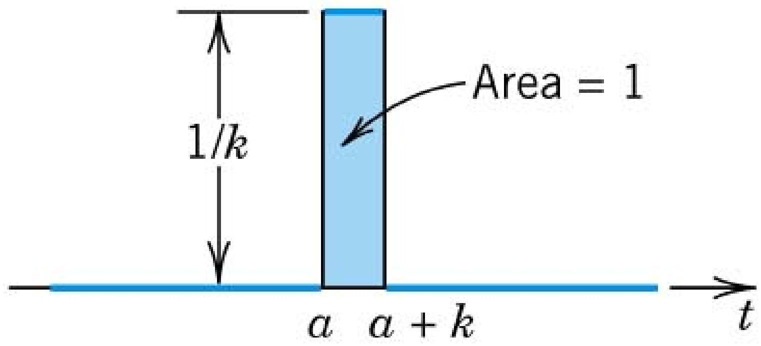
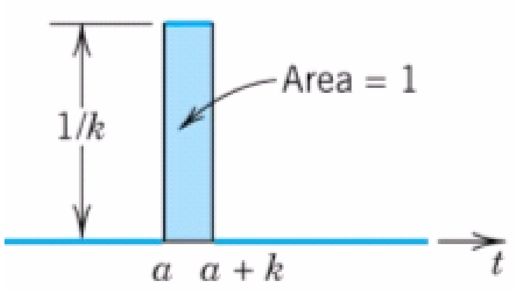


Fig. 117. The function $f_k(t-a)$ in (5)

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$f_k(t-a)=\begin{cases}\dfrac{1}{k} & a\le t\le a+k\\ 0 & \text{其他時刻}\end{cases}$$



$k\to 0$ 時 $\delta(t-a)=\infty$

$$\int_0^\infty \delta(t-a)dt=1$$

$$f_k(t-a)=\frac{1}{k}\left[u(t-a)-u(t-(a+k))\right]$$

$$L\{f_k(t-a)\}=\frac{1}{ks}\left[e^{-as}-e^{-(a+k)s}\right]=e^{-as}\frac{1-e^{-ks}}{ks}\qquad\cdots(1)$$

當 $k\to 0$ 時, (1)式 $=e^{-as}$

當 $k\to 0$ 時 $f_k(t-a)$ 稱爲狄拉克函數, 通常以 $\delta(t-a)$ 表示

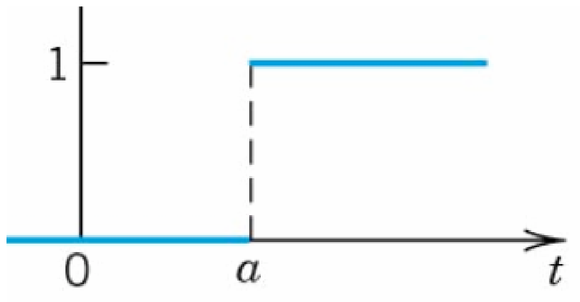
$$\text{故}\ L\{\delta(t-a)\}=e^{-as}$$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

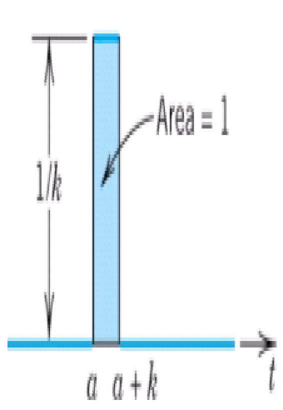
$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

求 $r(t)$ 為 (A) 方波 : $r(t) = u(t-1) - u(t-2)$

(B) 於 $t = 1$ 時單衝 $r(t) = \delta(t-1)$ 之響應 y



(A)



(B)

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$(A)\quad s^2Y+3sY+2Y=\frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)$$

F(s)

$$\Rightarrow Y(s^2+3s+2)=\frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)\Rightarrow Y=\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)$$

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+2)}=\frac{1/2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y=L^{-1}\{Y\}=L^{-1}\{F(s)(e^{-s}-e^{-2s})\}=L^{-1}\{e^{-s}F(s)-e^{-2s}F(s)\}$$
$$=f(t-1)u(t-1)-f(t-2)u(t-2)$$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y = f(t-1)u(t-1) - f(t-2)u(t-2)$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & 1 < t < 2 \\ -e^{-(t-1)} + e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} & t > 2 \end{cases}$$

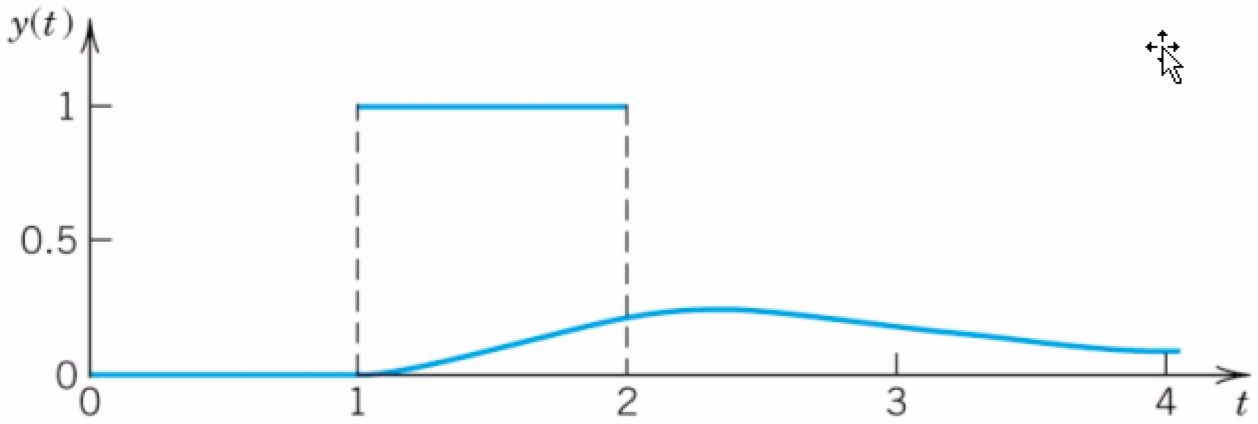


Fig. 118. Square wave and response in Example 4

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

(B) $s^2Y + 3sY + 2Y = e^{-s}$

$$\Rightarrow Y(s^2+3s+2) = e^{-s} \Rightarrow Y = \frac{1}{(s^2+3s+2)} e^{-s}$$

F(s)

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+3s+2)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$y = L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\{F(s)e^{-s}\} = L^{-1}\{e^{-s}F(s)\}$$
$$= f(t-1)u(t-1)$$

單階函數，第二移位定理，狄拉克函數(短脈衝)

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$y = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

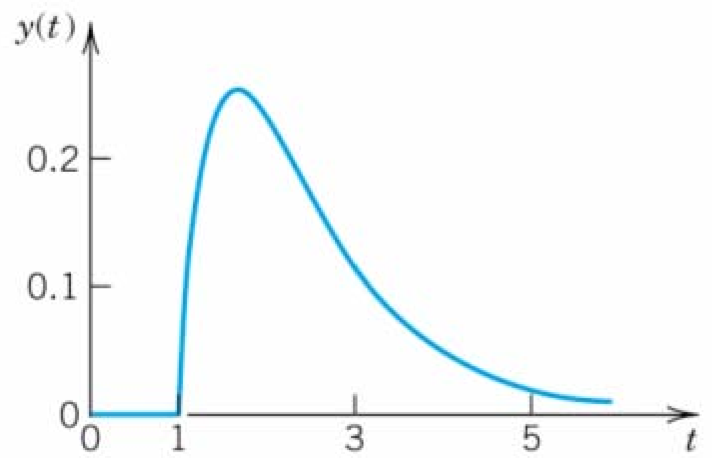


Fig. 119. Response to a hammer blow at $t = 1$ in Example 4

練習時間

求下列函數之拉普拉斯轉換

1. $tu(t-1)$
2. $(t-1)u(t-1)$
3. $e^{-2t}u(t-3)$
4. $4u(t-\pi)\cos t$
5. $(t-1)^2u(t-1)$
6. $u(t-2\pi)\sin t$

部分分式，微分方程式

$$L\{f''\} = sL\{f'\} - f'(0) = s^2 L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

求右列方程式之拉氏轉換：　$y'' - y = t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

以 Y 代表 y 的拉普拉斯轉換式

$$L\{y'' - y\} = L\{t\}$$

$$\Rightarrow L\{y''\} - L\{y\} = L\{t\}$$

$$\Rightarrow s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0) - L\{y\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow (s^2 - 1)Y - sy(0) - y'(0) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 - 1)Y - s - 1 = \frac{1}{s^2} \Rightarrow (s^2 - 1)Y = \frac{1}{s^2} + s + 1 = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2} \times \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 - 1)} = \frac{s + 1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}$$

$$= \frac{1}{s - 1} + \left(\frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}\right)$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2}\right\} = e^t + \sinh t - t$$

p211

部分分式，微分方程式

y 的拉普拉斯轉換式：

$$Y(s)=\frac{P(s)}{G(s)}$$

哈維賽展開式

$$Y(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_k(s)$$

$$L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_k(s)\}$$

$$=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_k(t)$$

$$=y(t)$$

p211

部分分式，微分方程式

y 的拉普拉斯轉換式：

$$Y(s)=\frac{P(s)}{G(s)}$$ 哈維賽展開式 $$Y(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_k(s)$$

依據 $G(s)$ 爲何種因子的乘積分類，再利用未定係數方式解出

$$Y=\frac{s^3+s^2+1}{s^2(s^2-1)}=\frac{s+1}{s^2-1}+\frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

$$=\frac{1}{s-1}+\left(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}\right)$$

部分分式，微分方程式

依據 $G(s)$ 爲何種因子的乘積分類,再利用未定係數方式解出

$$Y(s) = \frac{P(s)}{G(s)}$$

狀況一：無重複因子 $(s-a)$

狀況二：重複因子 $(s-a)^m$

狀況三：複數因子 $(s-a)(s-\bar{a}), \quad a = \alpha + i\beta, \bar{a} = \alpha - i\beta$

狀況四：重複複數因子 $[(s-a)(s-\bar{a})]^2$

部分分式，微分方程式

狀況一：無重複因子 $(s-a)$

例如：$Y(s)=\dfrac{P(s)}{G(s)}=\dfrac{s+1}{s(s-2)(s+3)}$

依據 $G(s)$ 因子的乘積分類，再利用未定係數方式解出

$$\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{(s-2)}+\frac{A_3}{(s+3)}$$

$$s+1=(s-2)(s+3)A_1+s(s+3)A_2+s(s-2)A_3$$

部分分式，微分方程式

狀況一：無重複因子 $(s-a)$

$$s+1=(s-2)(s+3)A_1+s(s+3)A_2+s(s-2)A_3$$

令 $s=0$ 可解得 $A_1=\dfrac{-1}{6}$

令 $s=2$ 可解得 $A_2=\dfrac{3}{10}$

令 $s=-3$ 可解得 $A_3=\dfrac{-2}{15}$

$$Y(s)=\frac{P(s)}{G(s)}=\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}$$

$$=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{(s-2)}+\frac{A_3}{(s+3)}$$

$$=\frac{-1}{6}\frac{1}{s}+\frac{3}{10}\frac{1}{(s-2)}-\frac{2}{15}\frac{1}{(s+3)}$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{\frac{-1}{6s}+\frac{3}{10(s-2)}-\frac{2}{15(s+3)}\}$$

$$=\frac{-1}{6}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{2}{15}e^{-3t}$$

部分分式，微分方程式

狀況一：無重複因子 $(s-a)$

例如：$Y(s)=\dfrac{P(s)}{G(s)}=\dfrac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\dfrac{s+1}{s(s^2+s-6)}$

依據 $G(s)$ 因子的乘積分類，再利用未定係數方式解出

$$\frac{s+1}{s(s^2+s-6)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2 s+A_3}{(s^2+s-6)}$$

$$s+1=(s^2+s-6)A_1+s(A_2 s+A_3)$$

部分分式，微分方程式

狀況二：重複因子 $(s-a)^m$

例如：$Y(s)=\dfrac{P(s)}{G(s)}=\dfrac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-2)(s-1)}$

依據 $G(s)$ 因子的乘積分類，再利用未定係數方式解出

$$\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-2)(s-1)}=\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_1}{s}+\frac{B}{(s-2)}+\frac{C}{(s-1)}$$

$$s^3-4s^2+4=(s-2)(s-1)A_2+s(s-2)(s-1)A_1+s^2(s-1)B+s^2(s-2)C$$

部分分式，微分方程式

狀況二：重複因子 $(s-a)^m$

$$s^3-4s^2+4=(s-2)(s-1)A_2+s(s-2)(s-1)A_1+s^2(s-1)B+s^2(s-2)C$$

令 $s=0$ 可解得 $A_2=2$

令 $s=2$ 可解得 $B=-1$

令 $s=1$ 可解得 $C=-1$

將原式等號兩邊微分，

並將$A_2=2$及$s=0$代入

即可解得$A_1=3$

$$Y(s)=\frac{P(s)}{G(s)}=\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-2)(s-1)}$$

$$=\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_1}{s}+\frac{B}{(s-2)}+\frac{C}{(s-1)}$$

$$=\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}+\frac{-1}{(s-2)}+\frac{-1}{(s-1)}$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}-\frac{-1}{(s-2)}+\frac{-1}{(s-1)}\}$$

$$=2t+3-e^{2t}-e^{t}$$

部分分式，微分方程式

狀況二：重複因子 $(s-a)^m$

例如：$Y(s)=\dfrac{P(s)}{G(s)}=\dfrac{s^3-4s^2+4}{(s+3)^2(s-2)(s-1)}$

依據 $G(s)$ 因子的乘積分類,再利用未定係數方式解出

$$\frac{s^3-4s^2+4}{s^2(s-2)(s-1)}=\frac{A_2}{(s+3)^2}+\frac{A_1}{(s+3)}+\frac{B}{(s-2)}+\frac{C}{(s-1)}$$

$$s^3-4s^2+4=(s-2)(s-1)A_2+(s+3)(s-2)(s-1)A_1+$$
$$(s+3)^2(s-1)B+(s+3)^2(s-2)C$$

部分分式，微分方程式

狀況三：無重複複數因子 $(s-a)(s-\bar{a})$

例如：$Y(s)=\dfrac{P(s)}{G(s)}=\dfrac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}$

依據 $G(s)$ 因子的乘積分類,再利用未定係數方式解出

$$\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}=\frac{As+B}{(s^2+4)}+\frac{Ms+N}{(s^2+2s+2)}$$

$$20=(As+B)(s^2+2s+2)+(Ms+N)(s^2+4)$$

部分分式，微分方程式

狀況三：無重複複數因子 $(s-a)(s-\bar{a})$

$$20=(As+B)(s^2+2s+2)+(Ms+N)(s^2+4)$$

由 s^3 項係數可得 $A+M=0$

由 s^2 項係數可得 $2A+B+N=0$

由 s 項係數可得 $2A+2B+4M=0$

由 s^0 項係數可得 $2B+4N=20$

依據上面四式解方程組

$$\Rightarrow A=-2$$

$$B=-2$$

$$M=2$$

$$N=6$$

$$Y(s)=\frac{P(s)}{G(s)}=\frac{20}{(s^2+4)(s^2+2s+2)}$$

$$=\frac{As+B}{(s^2+4)}+\frac{Ms+N}{(s^2+2s+2)}$$

$$=\frac{-2s-2}{(s^2+4)}+\frac{2s+6}{(s^2+2s+2)}$$

$$=\frac{-2s}{(s^2+2^2)}+\frac{-2}{(s^2+2^2)}+\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}+\frac{4}{(s+1)^2+1}$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{\frac{-2s}{(s^2+2^2)}+\frac{-2}{(s^2+2^2)}\}+$$

p211

$$L^{-1}\{\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}+\frac{4}{(s+1)^2+1}\}$$

$$=-2\cos 2t-\sin 2t+e^{-t}(2\cos t+4\sin t)$$

部分分式，微分方程式

狀況四 : 重複複數因子 $[(s-a)(s-\bar{a})]^2$

例如 : $Y(s)=\dfrac{P(s)}{G(s)}=\dfrac{20}{(s^2+4)^2}$

依據 $G(s)$ 因子的乘積分類, 再利用未定係數方式解出

$$\frac{20}{(s^2+4)^2}=\frac{As+B}{(s^2+4)^2}+\frac{Ms+N}{(s^2+4)}$$

$$20=(As+B)+(Ms+N)(s^2+4)$$

部分分式，微分方程式

狀況四：重複複數因子 $[(s-a)(s-\bar{a})]^2$

$$20=(As+B)+(Ms+N)(s^2+4)$$

由 s^3 項係數可得 $M=0$

由 s^2 項係數可得 $N=0$

由 s 項係數可得 $A+4M=0$

$\Rightarrow A=0$

由 s^0 項係數可得 $B=20$

$$Y(s)=\frac{P(s)}{G(s)}=\frac{20}{(s^2+4)^2}$$

$$=\frac{As+B}{(s^2+4)^2}+\frac{Ms+N}{(s^2+4)}$$

$$=\frac{20}{(s^2+4)^2}$$

$$=5\frac{2}{(s^2+4)}\times\frac{2}{(s^2+4)}$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=5L^{-1}\{\frac{2}{(s^2+4)}\times\frac{2}{(s^2+4)}\}$$

$$=5\sin 2t*\sin 2t$$

$$=5\int_0^t \sin 2\tau\sin(2t-2\tau)d\tau$$

部分分式，微分方程式

求右列式之反拉氏轉換：$L^{-1}\{\frac{2}{s(s+2)}\}$

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)}$$

$$\Rightarrow 2 = a(s+2) + bs$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$a + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+2)} \Rightarrow L^{-1}\{\frac{2}{s(s+2)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+2)}\}$$

$$= 1 - e^{-2t}$$

p211

部分分式，微分方程式

求右列式之反拉氏轉換：$L^{-1}\{\frac{2}{s(s^2+4)}\}$

$$\frac{2}{s(s^2+4)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow 2=a(s^2+4)+s(bs+c)$$

$$s^2 \Rightarrow a+b=0$$

$$s \Rightarrow c=0$$

$$s^0 \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\tfrac{1}{2} \Rightarrow b=-\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{s(s^2+4)}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{-\frac{1}{2}s}{(s^2+4)}$$

$$L^{-1}\{\frac{2}{s(s^2+4)}\}=L^{-1}\{\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{-\frac{1}{2}s}{(s^2+4)}\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$$

p211

部分分式，微分方程式

求右列式之反拉氏轉換 : $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s+4)^3}\}$

令 $z = s+4,\ s^2 = (z-4)^2 = z^2 - 8z + 16$

原式 $\frac{s^2}{(s+4)^3} \Rightarrow \frac{z^2 - 8z + 16}{z^3} = \frac{1}{z} + \frac{-8}{z^2} + \frac{16}{z^3}$

將 $z = s+4$ 代回 $\Rightarrow \frac{s^2}{(s+4)^3} = \frac{1}{s+4} + \frac{-8}{(s+4)^2} + \frac{16}{(s+4)^3}$

$$L^{-1}\{\frac{s^2}{(s+4)^3}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s+4} + \frac{-8}{(s+4)^2} + \frac{16}{(s+4)^3}\}$$

$$= L^{-1}\{\frac{1}{s+4}\} + L^{-1}\{\frac{-8}{(s+4)^2}\} + L^{-1}\{\frac{8 \times 2}{(s+4)^3}\}$$

$$= e^{-4t} - 8te^{-4t} + 8t^2 e^{-4t}$$

p211

工數

練習時間

部分分式，微分方程式

求下列式之反拉氏轉換：

1. $L^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)}\}$

2. $L^{-1}\{\frac{3s^2+2}{s(s-1)(s+2)}\}$

3. $L^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+9)}\}$

4. $L^{-1}\{\frac{s-3}{s^2+2s+5}\}$

5. $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s-2)^3}\}$

利用拉氏轉換解微分方程式：　$y'' - y = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

微分方程組

$$y_1'' = -y_1 + 3y_2 + f(t)$$
$$y_2'' = 2y_1 - 5y_2 + g(t)$$

→ y_1, y_2

拉氏轉換

$$s^2Y_1 - sy_1(0) - y_1'(0) = -Y_1 + 3Y_2 + F(s)$$
$$s^2Y_2 - sy_2(0) - y_2'(0) = 2Y_1 - 5Y_2 + G(s)$$

以代數方法解聯立方程組

$$Y_1 = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}$$
$$Y_2 = \frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

$Y(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_k(s)$

(部分分式)

反拉氏轉換

小考

求拉氏轉換

1. $2tu(t-1)$
2. $e^{-3t-5}u(t-3)$
3. $4u(t-2\pi)\sin t$

求下列式之反拉氏轉換：

1. $L^{-1}\{\dfrac{3}{s(s^2+9)}\}$
2. $L^{-1}\{\dfrac{s^2+1}{(s+1)^3}\}$

利用拉氏轉換解微分方程式： $y''-y=1,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$